

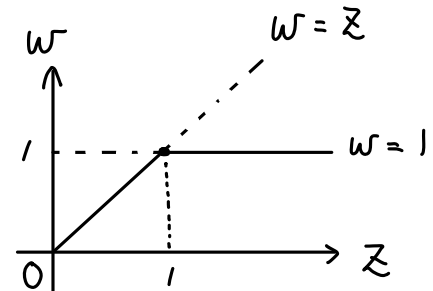
向1.

$$(1) E(X) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1, E(Y) = \int_0^1 y \cdot 1 dy = \frac{1}{2}.$$

$$(2) E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2} (\because \text{独立}).$$

$$(3) \begin{cases} Z = X+Y \\ W = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Z-W \\ Y = W \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet f_{ZW}(z, w) &= f_{XY}(x, y) \cdot \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)} \right\| \\ &= f_X(z-w) \cdot f_Y(w) \cdot \left\| \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \\ &= e^{-(z-w)} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= e^{-z} \cdot e^w \end{aligned}$$



$$\bullet 0 < x < \infty, 0 < y < 1 \text{ より } 0 < z-w < \infty, 0 < w < 1$$

$$z \text{ を固定すると, } 0 < z < 1 \text{ のとき, } 0 < w < z, 1 \leq z \text{ のとき, } 0 < w < 1.$$

したがって、Zの確率密度関数 f_Z は

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & (z \leq 0) \\ \int_0^z e^{-z} \cdot e^w dw = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^{-z} & (0 < z < 1) \\ \int_0^1 e^{-z} \cdot e^w dw = e^{-z}(e - 1) & (1 \leq z) \end{cases}$$

グラフは右下図のようになる。

(4) Xの累積分布関数を F_X とすると、 h は単調増加ゆえに逆関数 h^{-1} が存在し、 $X = h^{-1}(Y)$ に注意すると、

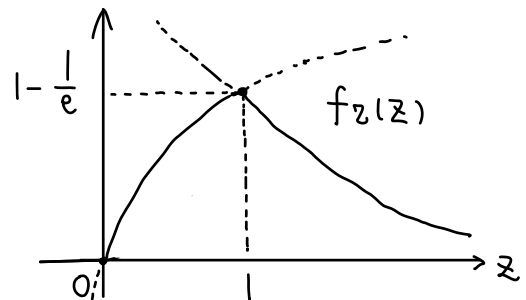
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P[X \leq x] = P[h^{-1}(Y) \leq x] \\ &= P[Y \leq h(x)] = \int_0^{h(x)} 1 dy = h(x). \end{aligned}$$

また、Xは平均1の指数分布に従うので、

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad \text{よって, } h(x) = 1 - e^{-x}.$$

このとき、

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[Xh(X)] = E[X \cdot (1 - e^{-X})] = E[X] - E[Xe^{-X}] \\ &= 1 - \int_0^{\infty} x e^{-x} \cdot e^{-x} dx = 1 - \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = 1 - \frac{\Gamma(2)}{2^2} \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



問2.

(1) $X = x$ の分布は超幾何分布に従うので,

$$P[X = x] = \frac{1}{100 C_{15}} x \binom{N_A}{x} \binom{100 - N_A}{15 - x}$$

$$\text{ただし, } 0 \leq x \leq N_A \text{ かつ } 0 \leq 15 - x \leq 100 - N_A \\ \Leftrightarrow N_A - 85 \leq x \leq 15$$

$$\text{なので, } \max\{0, N_A - 85\} \leq x \leq \min\{N_A, 15\}.$$

(2) N_A の尤度関数を $L(N_A)$ とおくと,

$$L(N_A) = P[X = 4 | N_A] = \frac{N_A C_4 \times \binom{100 - N_A}{11}}{100 C_{15}}$$

なので, こゝが最大となる N_A (整数) を求める.

$$\frac{L(N_A + 1)}{L(N_A)} < 1 \Leftrightarrow \frac{N_A + 1 C_4 \times \binom{100 - (N_A + 1)}{11}}{N_A C_4 \times \binom{100 - N_A}{11}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(N_A + 1)(89 - N_A)}{(N_A - 3)(100 - N_A)} < 1.$$

$$\Leftrightarrow N_A > 25.93 \dots$$

つまり 確率比が 1 未満となる最小の $\hat{N}_A = 26$

(3) 事前分布は離散-様分布;

$$P[N_A = n] = C \cdot (n + 1) \quad (0 \leq n \leq 100) \text{ なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{100} P[N_A = n] = 1 \quad (\text{全確率} = 1)$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \sum_{n=0}^{100} (n + 1) = 1 \Leftrightarrow C \cdot \left\{ \frac{100 \cdot 101}{2} + 101 \right\} = 1 \quad \text{よって } C = \frac{1}{5151}.$$

(4) 事後分布 $P[N_A | X = 4]$

$$\propto P[X = 4 | N_A] \times P[N_A]$$

$$\propto N_A C_4 \times \binom{100 - N_A}{11} \times (N_A + 1).$$

これを $\tilde{L}(N_A)$ とおき (2) と同じように

$$\frac{\tilde{L}(N_A + 1)}{\tilde{L}(N_A)} < 1 \Leftrightarrow \frac{(N_A + 1)(89 - N_A)}{(N_A - 3)(100 - N_A)} \cdot \frac{(N_A + 2)}{(N_A + 1)} < 1 \Leftrightarrow N_A > 29.875$$

と解けば, 最小の整数 $\hat{N}_A = 30$ が答えとなる.

問3.

$$(1) M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

$$(2) (2-1) \\ M_T(t) = E[e^{tT}] = E[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = \prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}] = e^{n\lambda(e^t - 1)} \\ \text{より } T \sim Po(n\lambda).$$

$$(2-2) \\ f(\vec{x}; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} \right) \cdot (\lambda^t \cdot e^{-n\lambda}) = h(\vec{x}) g(t, \lambda) \\ \text{とわかるので、7.1.3の、独立変数の分解定理から } T=t \text{ は } \lambda \text{ の十分統計量.}$$

$$(2-3) \\ L(\lambda) = f(\vec{x}; \lambda) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} \right) \cdot \lambda^{x_1 + \dots + x_n} \cdot e^{-n\lambda} \\ \ell(\lambda) = \log L(\lambda) = (x_1 + \dots + x_n) \cdot \log \lambda - n\lambda + (\text{定数}). \\ \ell'(\lambda) = \frac{(x_1 + \dots + x_n) - n\lambda}{\lambda} \text{ とおくと, } \ell'(\lambda) = 0 \text{ と } \hat{\lambda} = \frac{T}{n}.$$

$$(3). \text{一般に, } -c \leq \frac{T - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq c \Leftrightarrow \left| \frac{T - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \right| \leq c$$

$$\text{よって両辺を2乗して } \frac{(T - n\lambda)^2}{n\lambda} \leq c^2.$$

$$\Leftrightarrow T^2 - 2nT\lambda + n^2\lambda^2 \leq c^2 \cdot n\lambda.$$

$$\Leftrightarrow n^2\lambda^2 - 2n(T + \frac{c^2}{2})\lambda + T^2 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(T + \frac{c^2}{2}) - \sqrt{n^2(T + \frac{c^2}{2})^2 - n^2T^2}}{n^2} \leq \lambda \leq \frac{n(T + \frac{c^2}{2}) + \sqrt{n^2(T + \frac{c^2}{2})^2 - n^2T^2}}{n^2}.$$

ここで, $c = 2$ を代入すると,

$$\lambda \text{ の下限は } \frac{(T+2) - \sqrt{(T+2)^2 - T^2}}{n} = \frac{(T+2) - 2\sqrt{T+1}}{n}$$

$$\text{“ 上限は } \frac{(T+2) + 2\sqrt{T+1}}{n} \text{ である.}$$

$$(4) (3) \text{ の信頼区間の中心点は } \frac{T+2}{n} \text{ であり, } \hat{\lambda} = \frac{T}{n} \text{ よりも大きく,} \\ \lambda \text{ は } \frac{T}{n} \text{ よりも大きくなる可能性が高い.}$$

問4.

$$(1) \quad V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad E((X_1 - X_2)^3) &= E\left[\{(X_1 - \mu) - (X_2 - \mu)\}^3\right] \\ &= E\left[(X_1 - \mu)^3 - 3(X_1 - \mu)^2(X_2 - \mu) + 3(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)^2 - (X_2 - \mu)^3\right] \\ &= \tau - 3 \cdot 0 \cdot \sigma^2 + 3 \cdot 0 \cdot \sigma^2 - \tau = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \quad Y_i = X_i - \mu \text{ とおく.}$$

$$E[Y_i^3] = E[(X_i - \mu)^3] = \tau.$$

$$E[Y_i^2 Y_j] = E[(X_i - \mu)^2 (X_j - \mu)] = E[(X_i - \mu)^2] E[X_j - \mu] = 0.$$

$$E[Y_i Y_j Y_k] = E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)(X_k - \mu)] = E[X_i - \mu] E[X_j - \mu] E[X_k - \mu] = 0.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3\right] &= E\left[\sum_{i=1}^n \{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\}^3\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^3 - 3 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 (\bar{X} - \mu) + 3 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) (\bar{X} - \mu)^2 - \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^3\right] \dots (*) \end{aligned}$$

各項について,

$$E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^3\right] = \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^3] = n\tau$$

$$\begin{aligned} -3 E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 (\bar{X} - \mu)\right] &= -3 E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \cdot \{(X_1 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)\} \cdot \frac{1}{n}\right] \\ &= -3 \cdot \frac{1}{n} n\tau = -3\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) (\bar{X} - \mu)^2\right] &= 3 E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \cdot \{(X_1 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)\}^2 \cdot \frac{1}{n^2}\right] \\ &= 3 \cdot \frac{1}{n^2} n\tau = 3 \cdot \frac{\tau}{n} \end{aligned}$$

$$- E\left[\sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^3\right] = - E\left[\sum_{i=1}^n \{(X_1 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)\}^3 \cdot \frac{1}{n^3}\right] = -n \cdot \frac{1}{n^3} n\tau = -\frac{\tau}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } (*) &= n\tau - 3\tau + 3 \cdot \frac{\tau}{n} - \frac{\tau}{n} = \frac{(n^3 - 3n^2 + 2n)}{n^2} \tau \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2}{n} \tau = \frac{(n-1)(n-2)}{n} \tau. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ まず, } E[(X_k - \mu)^3] = \tau$$

$$\Leftrightarrow E[X_k^3] - 3\mu E[X_k^2] + 2\mu^3 = \tau$$

$$\Leftrightarrow E[X_k^3] - 3\mu(\sigma^2 + \mu^2) + 2\mu^3 = \tau$$

$$\Leftrightarrow E[X_k^3] = \tau + \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

$$E[X_k^2 X_l] = (\mu^2 + \sigma^2) \cdot \mu = \mu^3 + \mu\sigma^2, \quad E[X_k X_l X_m] = \mu^3 \quad \text{ただし,}$$

$$\hat{c} = (a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)^3$$

$$= (a_1^3 X_1^3 + \dots + a_n^3 X_n^3) + 3(a_1^2 a_2 X_1^2 X_2 + \dots + a_{n-1} a_n^2 X_{n-1} X_n^2) \\ + 6(a_1 a_2 a_3 X_1 X_2 X_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n X_{n-2} X_{n-1} X_n) \quad \text{ただし}$$

$$E[\hat{c}] = (a_1^3 + \dots + a_n^3) \cdot [\tau + \mu^3 + 3\mu\sigma^2]$$

$$+ 3(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 a_n + a_{n-1} a_n^2) (\mu^3 + \mu\sigma^2)$$

$$+ 6(a_1 a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n) \cdot \mu^3$$

$$= (a_1^3 + \dots + a_n^3) \tau + \{3(a_1^3 + \dots + a_n^3) + 3(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 a_n + a_{n-1} a_n^2)\} \mu\sigma^2 \\ + \{(a_1^3 + \dots + a_n^3) + 3(a_1^2 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n^2) + 6(a_1 a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n)\} \mu^3$$

つまり, 不偏性をもつには

$$\begin{cases} a_1^3 + \dots + a_n^3 = 1 \\ (a_1 + \dots + a_n)(a_1^2 + \dots + a_n^2) = 0 \\ (a_1 + \dots + a_n)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^3 = 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

これはよい.

問5.

(1) $\vec{y} = L\vec{x}$ とすれば,

$$V[\vec{y}] = V[L\vec{x}] = L V[\vec{x}] L^T = L \cdot I \cdot L^T = L L^T.$$

(2) $L\vec{x}$ と $M\vec{x}$ はともに多次元正規分布に従うので

$$L\vec{x} \perp M\vec{x} \iff \text{Cov}[L\vec{x}, M\vec{x}] = 0$$

とすればよく,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[L\vec{x}, M\vec{x}] &= L \cdot \text{Cov}[\vec{x}, \vec{x}] \cdot M^T = L \cdot V[\vec{x}] \cdot M^T \\ &= L \cdot I \cdot M^T = L \cdot M^T = 0 \end{aligned}$$

つまり、 $LM^T = 0$ である。

(3) (2) より、 $L\vec{x} - AM\vec{x} = (L - AM)\vec{x}$ と $M\vec{x}$ が独立

$$\iff (L - AM) \cdot M^T = 0$$

$$\iff LM^T - A(MM^T) = 0$$

$$\iff A(MM^T) = LM^T \quad \dots (*)$$

$$\iff A = LM^T \cdot (MM^T)^{-1}$$

(4) $k = \text{rank } M < m$ のとき、 M の特異値分解により

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

(U : m 次元直交行列, V : n 次元直交行列, Σ : $(m \times n)$ 行列)

で表せば、(*) より $A(MM^T) = LM^T$

$$\iff A(U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = L(U\Sigma V^T)^T$$

$$\iff A U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = L V \Sigma^T U^T$$

$$\iff A(U \Sigma \Sigma^T U^T) = L V \Sigma^T U^T$$

$$\iff A U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) U^T = L V \Sigma^T U^T$$

$$\iff A = L V \Sigma^T \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}, 0, \dots, 0\right) U^T$$

と書けるので、 L, M によらず、 A は存在する。 $\square$